CUPRINS

1 Mulțimi și elemente de logică matematică 3
1.1 Mulțimea numerelor reale 3
1.1.1 Numere reale 3
1.1.2 Operații algebrice cu numere reale ... 3
1.1.3 Calcule cu numere reale reprezentate prin litere 4
1.1.4 Ordonarea numerelor reale 6
1.1.5 Modulul unui număr real 7
1.1.6 Aproximări, trunchieri, rotunjiri 8
1.1.7 Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real 9
1.1.8 Operații cu intervale de numere reale ... 10
1.1.9 Inegalități 11
1.2 Elemente de logică matematică 14
1.2.1 Propoziție, predicat cuantificatori 14
1.2.2 Mulțimi. Corelarea elementelor de logică matematică cu operațiile și relațiile cu mulțimi . 16
1.3 Condiții necesare, condiții suficiente 18
1.4 Tipuri de raționamente logice 19
2 Funcții definite pe mulțimea numerelor naturale .. 23
2.1 Șiruri 23
2.2 Progresii aritmetice 23
2.2.1 Noțiunea de progresie aritmetică 23
2.2.2 Formula termenului general al progresiei aritmetice 24
2.2.3 Suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice 25
2.2.4 Alte proprietăți ale progresiilor aritmetice 26

2.3 Progresii geometrice 27
2.3.1 Noțiunea de progresie geometrică 27
2.3.2 Formula termenului general al progresiei geometrice 28
2.3.3 Suma primilor n termeni ai unei progresii geometrice 29
2.3.4 Alte proprietăți ale progresiilor geometrice 29
3 Funcții, lecturi grafice 31
3.1 Noțiunea de funcție 31
3.2 Funcții numerice 32
3.3 Compunerea funcțiilor 34
4 Funcția de gradul I 36
4.1 Ecuația de gradul I 36
4.2 Funcția afină 36
5 Funcția de gradul al doilea 40
5.1 Ecuația de gradul al doilea 40
5.2 Funcția de gradul al doilea 42
6 Mulțimi de numere 47
6.1 Numere reale 47
6.1.1 Puteri cu exponent întreg 47
6.1.2 Radicali 47
6.1.3 Puteri cu exponent rațional 51
6.1.4 Puteri cu exponent real 51
6.2 Logaritmi 52
6.3 Mulțimea numerelor complexe 55
6.3.1 Numere complexe sub formă algebrică . 55
6.3.2 Reprezentarea geometrică a numerelor complexe 58
6.3.3 Rezolvarea de ecuații în C 60
7 Funcții și ecuații 62
7.1 Funcții și ecuații 62
7.1.1 Injectivitate, surjectivitate, bijectivitate.

Funcții inverse 62
7.1.2 Funcția putere cu exponent natural 64
7.1.3 Funcția radical 64
7.1.4 Funcția exponențială 65
7.1.5 Funcția logaritmică 66
7.2 Ecuații 66
7.2.1 Ecuații, inecuații și sisteme de ecuații iraționale 66
7.2.2 Ecuații, inecuații și sisteme de ecuații exponențiale 69
7.2.3 Ecuații, inecuații și sisteme de ecuații logaritmice 71
8 Metode de numărare 74
8.1 Mulțimi finit ordonate 74
8.2 Permutări 75
8.3 Aranjamente 75
8.4 Combinări 75
8.5 Binomul lui Newton 76
9 Elemente de probabilități 78
9.1 Evenimente. Operații cu evenimente 78
9.2 Probabilitatea unui eveniment 79
9.3 Proprietăți ale probabilităților 80
9.4 Probabilități condiționate 80
9.5 Evenimente independente 81
9.6 Schema lui Poisson 81
9.7 Schema lui Bernoulli 82
9.8 Variabile aleatoare 82
10 Elemente de calcul matriceal și sisteme de ecuații liniare 85
10.1 Permutări 85
10.2 Matrice 86
10.3 Determinanți 89
10.4 Matrice inversabile 91

10.5 Rangul unei matrice 92
10.6 Sisteme de ecuații liniare 93
11 Structuri algebrice 97
11.1 Legi de compoziție 97
11.2 Grupuri 102
11.3 Inele 107
11.4 Corpuri 110
11.5 Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ (**Q, R, C,** Z_p, p număr prim) 112

Tiparul executat la
EDITURA HYPERION
CRAIOVA
Str. Împăratul Traian Nr. 30

1. Mulțimi și elemente de logică matematică

1.1 Mulțimea numerelor reale

1.1.1 Numere reale

1) Mulțimea numerelor naturale: $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \cdots, \}$.

2) Mulțimea numerelor întregi: $\mathbf{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, \}$.

3) Mulțimea numerelor raționale: $\mathbf{Q} = \left\{\frac{m}{n} \mid m, n \in \boldsymbol{Z}, n \neq 0\right\}$.

4) Mulțimea numerelor iraționale, formată din numerele reprezentate de o fracție zecimală, infinită, neperiodică și pe care o notăm $\mathbf{R} - \mathbf{Q}$.

5) Mulțimea numerelor reale: $\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup (\mathbf{R} - \mathbf{Q})$.

Evident au loc relațiile:

a) $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ b) $\mathbf{R} - \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ c) $\mathbf{Q} \cap (\mathbf{R} - \mathbf{Q}) = \emptyset$.

6) O fracție ordinară $\frac{m}{n}$ este ireductibilă dacă c.m.m.d.c. $(m, n) = 1$.

Exemple: $\frac{2}{5}, \frac{7}{15}, \frac{3}{8}$.

7) O fracție ordinară $\frac{m}{n}$ este reductibilă dacă există cel puțin un număr prim prin care fracția se poate simplifica.

Exemple: $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \frac{5}{10} = \frac{1}{2}, \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$.

8) Fracțiile ordinare care reprezintă numărul rațional $\frac{m}{n}$ se transformă în fracție zecimală după formula: $\frac{m}{n} = a, a_1 a_2 a_3 \cdots$.

Exemple: $\frac{1}{3} = 0,(3)$ - fracție zecimală periodică simplă

$\frac{5}{12} = 0,41(6)$ - fracție zecimală periodică mixtă.

1.1.2 Operații algebrice cu numere reale

Operațiile algebrice pe mulțimea numerelor reale sunt: adunarea și înmulțirea. Ele se definesc ca extensii ale operațiilor de adunare și înmulțire din mulțimea numerelor raționale.

a) Proprietățile adunării

1) Asociativitatea: $(x + y) + z = x + (y + z)$ $(\forall)x, y, z \in \mathbf{R}$;
2) Comutativitatea: $x + y = y + x$ $(\forall)x, y \in \mathbf{R}$;
3) Element neutru 0: $x + 0 = 0 + x = x$ $(\forall)x \in \mathbf{R}$;
4) Element opus: : $x + (-x) = (-x) + x$ $(\forall)x \in \mathbf{R}$; numărul $-x$ se numește opusul lui x.

b) Proprietățile înmulțirii

1) Asociativitatea: $(xy)z = x(yz)$ $(\forall)x, y, z \in \mathbf{R}$;
2) Comutativitatea: $xy = yx$ $(\forall)x, y \in \mathbf{R}$;
3) Element neutru 1: $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ $(\forall)x \in \mathbf{R}$;
4) Element inversabil : $x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1$ $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$; numărul $\frac{1}{x}$ se numește inversul lui x.

c) Proprietate de legătură între înmulțire și adunare

1) Distributivitatea înmulțirii față de adunare:

$$x(y + z) = xy + xz \ (\forall)x, y, z \in \mathbf{R}.$$

Observație. Ca operații derivate ale adunării și înmulțirii se pot defini operațiile de scădere și împărțire.

a) $x - y = x + (-y), (\forall)x, y \in \mathbf{R}$;

b) $x : y = x \cdot \frac{1}{y}, y \neq 0$.

1.1.3 Calcule cu numere reale reprezentate prin litere

a) Formule de calcul prescurtat

1) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
2) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
3) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$;
4) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;

5) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;
6) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$;
7) $(a-b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$;
8) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$;
9) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$;
10) $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$, $n \geq 2, n \in \mathbf{N}$;
11) $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1})$, $n \geq 2,\ n \in \mathbf{N}$, impar.

b) Alte formule algebrice utile

1) $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$;
2) $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$;
3) $a^4 + b^4 = (a^2+b^2)^2 - 2a^2b^2 = [(a+b)^2 - 2ab]^2 - 2a^2b^2$;
4) $a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$;
5) $a^6 + b^6 = (a^2+b^2)^3 - 3a^2b^2(a^2+b^2)$;
6) $a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2ab - 2ac - 2bc$;
7. $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$;
8) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc$ = *12 a+b+ca−b2+b−c2+c−a2.*

9) $(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a+b)(b+c)(c+a)$.

c) Proprietățile puterilor cu exponent întreg

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
2) $a^m : a^n = a^{m-n}, a \neq 0$;
3) $(a^m)^n = a^{mn}$;
4) $(ab)^m = a^m \cdot b^m$;
5) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, b \neq 0$.

Aplicații

1. Să se arate că dacă $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât $a + b = 1$, atunci:
a) $a^2 + b^2 = 1 - 2ab$ b) $a^3 + b^3 = 1 - 3ab$.

Soluție: Se aplică formulele **1)** și **2)** de la **1.1.3** b).

2. Să se arate că dacă $a, b, c \in \mathbf{R}$, astfel încât $a + b + c = 0$, atunci: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Soluție: Se aplică formula **8)** de la **1.1.3** b).

3. Să se descompună în factori:

$$a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b).$$

Soluție: $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = a^2b - a^2c + b^2c - b^2a + c^2a - c^2b = ab(a-b) - c(a^2 - b^2) + c^2(a-b) = (a-b)(ab - ac - bc + c^2) = (a-b)(b-c)(a-c)$.

1.1.4 Ordonarea numerelor reale

Introducem pe **R** relațiile $<$ respectiv $\leq$ astfel:
a) $x < y$ dacă $y - x > 0$;
b) $x \leq y$ dacă $y - x \geq 0$.

a) Proprietatea de trihotomie. Oricare ar fi $x, y \in \mathbf{R}$ este adevărată una și numai una din relațiile $x < y, x = y, x > y$.

b) Proprietățile relației $\leq$:
1) $x \leq x, (\forall) x \in \mathbf{R}$ (reflexivitate);
2) $x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$ (antisimetrie);
3) $x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (tranzitivitate).

Relația $\leq$, este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă și deci este o **relație de ordine** pe mulțimea **R**.

Relația $<$ este tranzitivă, dar nu este reflexivă și antisimetrică și deci nu este relație de ordine pe mulțimea **R**.

c) Relația $\leq$ este o **relație de ordine totală** pe **R**, deoarece $(\forall) x, y \in \mathbf{R}$ avem $x \leq y$ sau $y \leq x$.